УДК 621.01

О.К. Морачковський, Є.І. Дружинін, Ю.В. Ромашов

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ НА ОСНОВІ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ АНАЛОГІЙ І ЗАГАЛЬНОГО ВАРІАЦІЙНОГО РІВНЯННЯ МЕХАНІКИ

Розглянуто, як з використанням методики побудови рівнянь руху дискретних механічних систем на основі принципу Даламбера – Лагранжа у векторно-матричній формі й електро-механічній аналогії одержати звичайні диференціальні рівняння, що описують процеси в електричних колах.

Постановка проблеми. Аналіз динамічних процесів у гідравлічних і пневматичних силових системах, у машинах з гідрооб'ємними й гідродинамічними передачами, як і в інших технічних пристроях, зводиться до складання й наступного розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь [1 – 6]. Більшість таких систем адекватно представляються їх дискретними моделями великої розмірності (більшою кількістю параметрів і ступенів вільності), що утруднює складання диференціальних рівнянь і одержання їх розв'язків. При дослідженні зв'язаних фізико-механічних процесів у таких системах задачі аналізу процесів, що відбуваються в них, істотно ускладнюються. У цьому зв'язку актуальним є створення на базі спеціальних систем комп'ютерної алгебри (СКА) програмних комплексів (ПК) для автоматизованої побудови рівнянь і ефективного пошуку розв'язків задач аналізу динамічних процесів у цих системах [3, 5, 6]. Розробка таких ПК для аналізу динамічних процесів у дискретних електромеханічних системах має важливе прикладне значення для вирішення проблем електричного транспорту.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Окремі публікації [1 – 4] присвячені математичному моделюванню динамічних процесів різної фізичної природи в дискретних системах. В основу побудови узагальнених моделей покладено відомі гідромеханічні й електромеханічні аналогії, що використовують універсальність диференціальних рівнянь, які описують динамічні процеси різної фізичної природи. Так, ґрунтуючись на електромеханічній аналогії для електричних кіл (ЕК) і електромагнітних систем (ЕМС), застосовують досить універсальні прийоми побудови математичних моделей, які добре формалізовані завдяки використанню законів Кірхгофа й орієнтованих графів [1, 4]. Разом із тим на основі електромеханічної аналогії у [2] отримано диференціальні рівняння ЕК із використанням рівнянь Лагранжа другого роду, також добре формалізованих з використанням відомого в механіці формалізму Лагранжа. Сьогодні існують розробки ПК, в основу яких покладено спеціальні СКА, призначені для аналізу динамічних процесів у дискретних механічних системах. Наприклад, у роботах [3, 5, 6] дається опис ПК “Кидим”, що використовується для розв'язання задач аналізу кінематики, динаміки і статики силових передач транспортних систем, у тому числі із гідрооб'ємними передачами. Однак у літературі практично немає теоретичних і прикладних розробок ПК, заснованих на СКА і призначених для аналізу динамічних процесів у дискретних електромеханічних системах.

Метою цього дослідження є побудова теоретичних основ автоматизованого складання диференціальних рівнянь для опису динамічних процесів у дискретних електромеханічних системах на базі загального варіаційного рівняння Даламбера – Лагранжа, записаного у векторно-матричній формі з використанням електромеханічної аналогії.

Виклад основного матеріалу. Згідно з [3, 5, 6] модель дискретної механічної системи уявляється сукупністю її інерційних, дисипативних, пружних і силових елементів. Уведемо в розгляд вектори значень цих елементів:

$$\vec{J}=\{J_1,J_2,...,J_i,\},\vec{D}=\{D_1,D_2,...,D_k,\},\vec{C}=\{C_1,C_2,...,C_l,\},\vec{P}=\{P_1,P_2,...,P_m,\}, \qquad (1)$$

вектори їх координат

$$\vec{\eta}=\{\eta_1,\eta_2,...,\eta_i\},\vec{\theta}=\{\theta_1,\theta_2,...,\theta_k\},\vec{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_l\},\vec{\psi}=\{\psi_1,\psi_2,...,\psi_m\}, \qquad (2)$$

а також вектор узагальнених координат $\vec{\zeta}=\{\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n\}$.

Крім того, введемо векторні функції (структури):

$$\vec{f}_1 = \left\{ f_{11}, f_{12}, ..., f_{1i} \right\}, \vec{f}_2 = \left\{ f_{21}, f_{22}, ..., f_{2k} \right\}, \vec{f}_3 = \left\{ f_{31}, f_{32}, ..., f_{3l} \right\}, \vec{f}_4 = \left\{ f_{41}, f_{42}, ..., f_{4m} \right\}, \quad (3)$$

які дозволяють однозначно виразити координати інерційних, пружних, дисипативних і силових елементів через узагальнені координати:

$$\vec{\eta} = \vec{f}_1\left(\vec{\zeta}\right), \vec{\theta} = \vec{f}_2\left(\vec{\zeta}\right), \vec{\xi} = \vec{f}_3\left(\vec{\zeta}\right), \vec{\psi} = \vec{f}_4\left(\vec{\zeta}\right). \quad (4)$$

Використовуючи введені величини, можна визначити вектори різних сил (інерції, дисипації, пружності), необхідні для складання рівнянь руху на основі принципу Даламбера – Лагранжа, що має такий вигляд:

$$\left(J\ddot{\vec{\eta}}, \delta\vec{\eta}\right) + \left(D\dot{\vec{\theta}}, \delta\vec{\theta}\right) + \left(C\vec{\xi}, \delta\vec{\xi}\right) = \left(\vec{P}, \delta\vec{\psi}\right), \quad (5)$$

де J, D, C – симетричні матриці інерції, дисипації і пружності, розмірність яких визначається відповідно до розмірності векторів $\vec{J}, \vec{D}, \vec{C}$. При цьому

$$\delta\vec{\eta} = \frac{\partial\vec{f}_1\left(\vec{\zeta}\right)}{\partial\vec{\zeta}}\delta\vec{\zeta}; \delta\vec{\theta} = \frac{\partial\vec{f}_2\left(\vec{\zeta}\right)}{\partial\vec{\zeta}}\delta\vec{\zeta}; \delta\vec{\xi} = \frac{\partial\vec{f}_3\left(\vec{\zeta}\right)}{\partial\vec{\zeta}}\delta\vec{\zeta}; \delta\vec{\psi} = \frac{\partial\vec{f}_4\left(\vec{\zeta}\right)}{\partial\vec{\zeta}}\delta\vec{\zeta}; \ddot{\vec{\eta}} = \ddot{\vec{f}}_1\left(\vec{\zeta}\right); \dot{\vec{\theta}} = \dot{\vec{f}}_2\left(\vec{\zeta}\right). \quad (6)$$

Увівши позначення для структурних матриць інерції, демпфірування, пружності й силових впливів:

$$S_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial \zeta_1} & ... & \frac{\partial f_{11}}{\partial \zeta_n} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_{1i}}{\partial \zeta_1} & ... & \frac{\partial f_{1i}}{\partial \zeta_n} \end{bmatrix}; S_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{21}}{\partial \zeta_1} & ... & \frac{\partial f_{21}}{\partial \zeta_n} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_{2k}}{\partial \zeta_1} & ... & \frac{\partial f_{2k}}{\partial \zeta_n} \end{bmatrix}; S_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{31}}{\partial \zeta_1} & ... & \frac{\partial f_{31}}{\partial \zeta_n} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_{3l}}{\partial \zeta_1} & ... & \frac{\partial f_{3l}}{\partial \zeta_n} \end{bmatrix}; S_4 = \frac{\partial\vec{f}_4\left(\vec{\zeta}\right)}{\partial\vec{\zeta}},$$

запишемо (5) у вигляді

$$\left(J\ddot{\vec{\eta}}, S_1\delta\vec{\zeta}\right) + \left(D\dot{\vec{\theta}}, S_2\delta\vec{\zeta}\right) + \left(C\vec{\xi}, S_3\delta\vec{\zeta}\right) = \left(\vec{P}, S_4\delta\vec{\zeta}\right). \quad (7)$$

Скориставшись властивістю спряжености матриць S_1, S_2, S_3, S_4, отримаємо

$$\left(S_1^T J\ddot{\vec{\eta}}, \delta\vec{\zeta}\right) + \left(S_2^T D\dot{\vec{\theta}}, \delta\vec{\zeta}\right) + \left(S_3^T C\vec{\xi}, \delta\vec{\zeta}\right) = \left(S_4^T \vec{P}, \delta\vec{\zeta}\right). \quad (8)$$

Для голономних систем варіації узагальнених координат $\delta\vec{\zeta}$ – довільні, отже, з (8) одержимо систему диференціальних рівнянь у векторно-матричній формі

$$S_1^T J\ddot{\vec{\eta}} + S_2^T D\dot{\vec{\theta}} + S_3^T C\vec{\xi} = S_4^T \vec{P}. \quad (9)$$

Замінимо вектори координат векторними функціями, що визначають структури

$$S_1^T J\ddot{\vec{f}}_1 + S_2^T D\dot{\vec{f}}_2 + S_3^T C\vec{f}_3 = S_4^T \vec{P}. \quad (10)$$

Рівняння (10) є узагальненою математичною моделлю динамічних процесів, що мають місце в дискретних голономних системах. Для широкого класу систем структури $\vec{f}_j\left(\vec{\zeta}\right)(j=\overline{1,4})$ є постійними і лінійними. З урахуванням цього рівняння (10) набуде вигляду

$$S_1^T J S_1 \ddot{\vec{\zeta}} + S_2^T D S_2 \dot{\vec{\zeta}} + S_3^T C S_3 \vec{\zeta} = S_4^T \vec{P}, \quad (11)$$

де $S_j (j=\overline{1,4})$ – числові структурні матриці.

Тепер представимо електричну систему із зосередженими параметрами у вигляді множини l індуктивних елементів з індуктивностями $\left\{\mathrm{L_k}\right\}_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{l}}$, множини r омічних опорів $\left\{\mathrm{R_k}\right\}_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{r}}$, множини c конденсаторів з ємностями $\left\{\mathrm{C_k}\right\}_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{c}}$ і множини e джерел ЕДС $\left\{\mathrm{E_k}\right\}_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{r}}$. Скористаємося електромеханічною аналогією і складемо варіаційну рівність у формі, що відповідає варіаційному рівнянню Даламбера – Лагранжа:

$$\sum_{k=1}^{l} L_k \ddot{q}_k^{(L)} \delta q_k^{(L)} + \sum_{k=1}^{r} R_k \dot{q}_k^{(R)} \delta q_k^{(R)} + \sum_{k=1}^{c} \frac{1}{C_k} q_k^{(C)} \delta q_k^{(C)} + \sum_{k=1}^{e} E_k \delta q_k^{(E)} = 0, \tag{12}$$

де $q_k^{(L)}$, $q_k^{(R)}$, $q_k^{(C)}$, $q_k^{(E)}$ – заряди, що проходять через індуктивний елемент L_k, омічний опір R_k, конденсатор C_k і джерело ЕДС E_k.

З огляду на рівність зарядів, що проходять через послідовно з'єднані елементи електричної системи, а також співвідношення першого закону Кірхгофа для вузлових з'єднань елементів електричної системи визначимо n незалежних зарядів $\{q_k\}_{k=1}^{n}$, що дозволяють визначити заряди, які проходять через кожний елемент електричної системи:

$$q_k^{(L)} = q_k^{(L)}(q_1, q_1, \ldots, q_n);\ \dot{q}_k^{(L)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_i} \dot{q}_i, \tag{13}$$

$$\ddot{q}_k^{(L)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 q_k^{(L)}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_i} \ddot{q}_i;\ \delta q_k^{(L)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_i} \delta q_i, \tag{14}$$

$$q_k^{(R)} = q_k^{(R)}(q_1, q_1, \ldots, q_n);\ \dot{q}_k^{(R)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_k^{(R)}}{\partial q_i} \dot{q}_i;\ \delta q_k^{(R)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_k^{(R)}}{\partial q_i} \delta q_i, \tag{15}$$

$$q_k^{(C)} = q_k^{(C)}(q_1, q_1, \ldots, q_n);\ \delta q_k^{(C)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_k^{(C)}}{\partial q_i} \delta q_i, \tag{16}$$

$$q_k^{(E)} = q_k^{(E)}(q_1, q_1, \ldots, q_n);\ \delta q_k^{(E)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_k^{(E)}}{\partial q_i} \delta q_i. \tag{17}$$

З огляду на незалежність варіацій $q_k^{(L)}$, $q_k^{(R)}$, $q_k^{(C)}$, $q_k^{(E)}$ і співвідношення (13) – (17) із (12) одержимо диференціальні рівняння другого закону Кірхгофа для ЕК:

$$\sum_{i=1}^{n} a_s^i \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} b_s^i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_s^{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = Q_s, \tag{18}$$

де $s = \overline{1, n}$, $a_s^i = \sum_{k=1}^{l} L_k \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_i} \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_s}$, $b_s^i = \sum_{k=1}^{r} R_k \frac{\partial q_k^{(R)}}{\partial q_i} \frac{\partial q_k^{(R)}}{\partial q_s}$, $c_s^{ij} = \sum_{k=1}^{l} L_k \frac{\partial^2 q_k^{(L)}}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_s}$,

$$Q_s = -\sum_{k=1}^{c} \frac{1}{C_k} q_k^{(C)} \frac{\partial q_k^{(C)}}{\partial q_s} - \sum_{k=1}^{e} E_k \frac{\partial q_k^{(E)}}{\partial q_s}.$$

Таким чином, для побудови диференціальних рівнянь, що описують процеси, які проходять в ЕК, достатньо визначити множини впорядкованих пар l індуктивних елементів з індуктивностями $\{L_k\}_{k=1}^{l}$, множини r омічних опорів $\{R_k\}_{k=1}^{r}$, множини c конденсаторів з ємностями $\{C_k\}_{k=1}^{c}$ і множини e джерел ЕДС $\{E_k\}_{k=1}^{r}$ та заряди, що проходять через них, виразити через незалежні величини. Наявність комп'ютерних систем аналітичних обчислень дозволить автоматизувати процес побудови рівнянь, що описують процеси в електричних системах із зосередженими параметрами.

Наведений підхід до складання рівнянь реалізовано у ПК "Килим", створеному на основі спеціальної СКА, для комп'ютерного моделювання задач динаміки, кінематики і статики дискретних механічних систем.

Використання рівнянь виду (18) до електричного кола (див. рис. 1) дозволить одержати його диференціальні рівняння у вигляді, що відповідає векторно-матричному рівнянню (11).

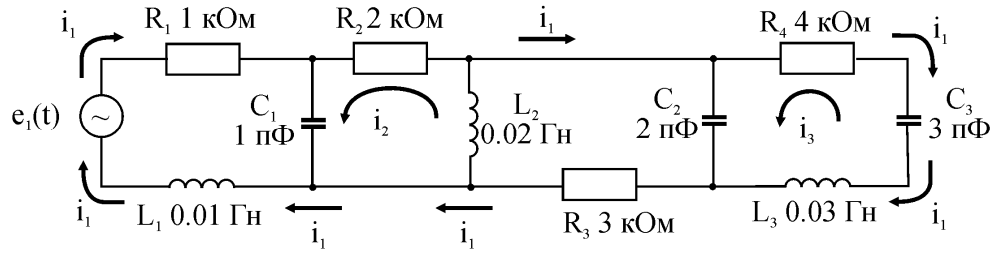

Рис. 1. Схема електричного кола

Скористаємося першим варіантом електромеханічної аналогії. Між характеристиками електричного кола і механічної системи приймемо такі відповідності: зарядам у гілках контуру відповідає переміщення точок матеріальної системи; напругам – зовнішні сили; силам струму – швидкості матеріальних точок; опорам струму – внутрішні тертя; ємностям – піддатливості зв'язків; індуктивностям – інерційні характеристики точок механічної системи. Як узагальнені координати виберемо заряди в контурах схеми. Рівняння (9), (10) можуть бути застосовані для складання диференціальних рівнянь електричних кіл. Якщо кола лінійні, то застосовується рівняння (11).

Структурні матриці і матриці значень "інерційних", "дисипативних", "пружних" елементів та вектор зовнішніх "силових" елементів запишемо так:

$$S_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix};S_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix};S_3=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\-1&0&1\end{bmatrix};S_4^T=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}. \tag{19}$$

$$J=\begin{bmatrix}L_1&0&0\\0&L_2&0\\0&0&L_3\end{bmatrix};D=\begin{bmatrix}R_1&0&0&0\\0&R_2&0&0\\0&0&R_3&0\\0&0&0&R_4\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix}\frac{1}{C_1}&0&0\\0&\frac{1}{C_2}&0\\0&0&\frac{1}{C_3}\end{bmatrix};\vec{P}=\{e_1(t)\}. \tag{20}$$

Після підстановки (19), (20) у (11) і виконання операцій маємо векторно-матричне рівняння

$$\begin{bmatrix}L_1+L_3&0&-L_3\\0&L_2&0\\-L_3&0&L_3\end{bmatrix}\cdot\ddot{\vec{q}}+\begin{bmatrix}R_1+R_2+R_3+R_4&-R_2&-R_4\\-R_2&R_2&0\\-R_4&0&R_4\end{bmatrix}\cdot\dot{\vec{q}}+\begin{bmatrix}\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_3}&-\frac{1}{C_1}&-\frac{1}{C_3}\\-\frac{1}{C_1}&\frac{1}{C_1}&0\\-\frac{1}{C_3}&0&\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\end{bmatrix}\cdot\vec{q}=\begin{bmatrix}e_1(t)\\0\\0\end{bmatrix} \tag{21}$$

і остаточно система диференціальних рівнянь ЕК набуде вигляду

$$\begin{cases}(L_1+L_3)\ddot{q}_1-L_3\ddot{q}_3+(R_1+R_2+R_3+R_4)\dot{q}_1+\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_3}\right)q_1-\frac{1}{C_1}q_2-\frac{1}{C_3}q_3=e_1(t);\\ L_2\ddot{q}_2+R_2\dot{q}_2-R_2\dot{q}_1+\frac{1}{C_1}q_2-\frac{1}{C_1}q_1=0;\\ L_3\ddot{q}_3-L_3\ddot{q}_1+R_4\dot{q}_3-R_4\dot{q}_1+\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)q_3-\frac{1}{C_3}q_1=0.\end{cases} \tag{22}$$

У табл. 1 наведені значення власних частот електричного кола, а на рис. 2, 3 – амплітудно-частотні характеристики зарядів, що проходять через елементи системи. На вхід електричного кола (див. рис. 1) подавався синусоїдальний сигнал амплітудою 10 В.

Т а б л и ц я 1

Номер власної частоти	Значення власних частот	
	Гц	рад/с
1	336 178, 004 091	2 112 268,695 900
2	909 467, 889 701	5 714 355,281 920
3	2 197 619,398 380	13 808 049,914 673

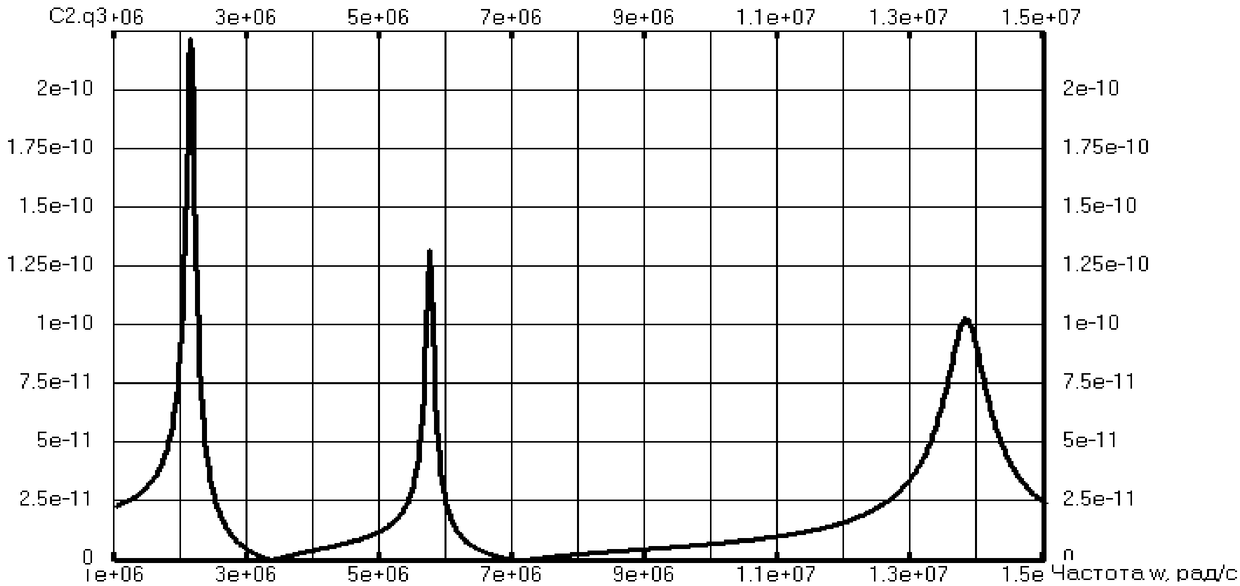

Рис. 2. Амплітудно-частотна характеристика заряду на конденсаторі C_2

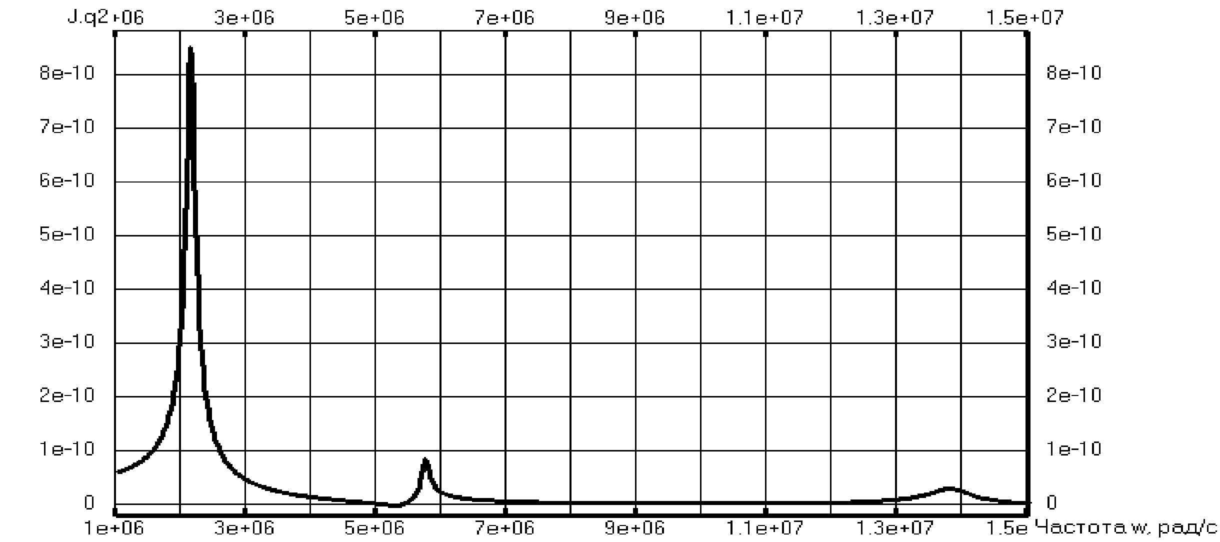

Рис. 3. Амплітудно-частотна характеристика заряду на індуктивності L_3

Висновки

Використовуючи методику обґрунтування рівнянь руху дискретних механічних систем на основі принципу Даламбера – Лагранжа у векторно-матричній формі й електромеханічній аналогії, можна одержати звичайні диференціальні рівняння, що описують процеси в електричних колах. Розглянуто питання комп'ютерного складання рівнянь електромеханічних систем і приклади моделювання динамічних процесів в електричних колах. За рахунок спільного використання рівнянь, що описують процеси різної фізичної природи в дискретних системах, можна автоматизувати побудову узагальненої математичної моделі електромеханічних систем для дослідження динамічних процесів, що проходять у них.

Список використаних джерел

1. Блекборн Дж., Ритхоф Г., Шерер Дж. Л. Гидравлические и пневматические силовые системы управления. – М.: ИЛ, 1962. – 616 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966. – 300 с.
3. Дружинин Е.И., Штейнвольф Л.И. Динамические модели силовых цепей машин с гидрообъемными передачами // Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища шк., 1984. – Вып. 36. – С. 95 – 102.
4. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 496 с.
5. Митин В.Н., Штейнвольф Л.И. Структурные матрицы вибрационных систем // Динамика и прочность машин. – Харьков, 1973. – Вып. 17. – С. 3 – 7.
6. Митин В.Н., Штейнвольф Л.И. Структуры дискретных механических моделей конструкций // Там же. – Харьков, 1982. – Вып. 35. – С. 3 – 6.

Стаття надійшла до редакції 30.05.2007 р.